Formule trigonometrice

Breviar complet pentru liceu și Bacalaureat: relații fundamentale, reducere, sume, unghi dublu, transformări, ecuații **matepenet.ro**

Relații fundamentale

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$, $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$

$1 + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $1 + \operatorname{ctg}^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x}$

Valori uzuale

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—
ctg	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Reducerea la primul cadran

unghi	$\sin$	$\cos$	tg
$-x$	$-\sin x$	$\cos x$	$-\operatorname{tg} x$
$\frac{\pi}{2} - x$	$\cos x$	$\sin x$	$\operatorname{ctg} x$
$\frac{\pi}{2} + x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\operatorname{ctg} x$
$\pi - x$	$\sin x$	$-\cos x$	$-\operatorname{tg} x$
$\pi + x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\operatorname{tg} x$
$2\pi - x$	$-\sin x$	$\cos x$	$-\operatorname{tg} x$

Semne: cadranul I toate +; II doar sin +; III doar tg, ctg +; IV doar cos +. Perioade: $\sin, \cos$ — 2π; $\operatorname{tg}, \operatorname{ctg}$ — π.

Suma și diferența unghiurilor

$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$

$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$

$\operatorname{tg}(a \pm b) = \dfrac{\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b}{1 \mp \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$

Unghiul dublu și triplu

$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

$\operatorname{tg} 2a = \dfrac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$

$\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$, $\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$

Teoremele sinusului și cosinusului

$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$; $\mathcal{A} = \dfrac{ab \sin C}{2}$

Coborârea puterii, unghiul pe jumătate

$\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$

$\operatorname{tg} \dfrac{x}{2} = \dfrac{\sin x}{1 + \cos x} = \dfrac{1 - \cos x}{\sin x}$

Cu $t = \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$: $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\operatorname{tg} x = \dfrac{2t}{1-t^2}$

Transformarea sumei în produs

$\sin a + \sin b = 2\sin \dfrac{a+b}{2} \cos \dfrac{a-b}{2}$

$\sin a - \sin b = 2\sin \dfrac{a-b}{2} \cos \dfrac{a+b}{2}$

$\cos a + \cos b = 2\cos \dfrac{a+b}{2} \cos \dfrac{a-b}{2}$

$\cos a - \cos b = -2\sin \dfrac{a+b}{2} \sin \dfrac{a-b}{2}$

$\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b = \dfrac{\sin(a \pm b)}{\cos a \cos b}$

Transformarea produsului în sumă

$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\big[\sin(a+b) + \sin(a-b)\big]$

$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\big[\cos(a-b) - \cos(a+b)\big]$

$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\big[\cos(a+b) + \cos(a-b)\big]$

Funcțiile trigonometrice inverse

Funcția	Domeniu	Valori în
arcsin	$[-1, 1]$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
arccos	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
arctg	$\mathbb{R}$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
arcctg	$\mathbb{R}$	$(0, \pi)$

$\arcsin(-x) = -\arcsin x$, $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$

$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$

$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$

Ecuații trigonometrice fundamentale ($k \in \mathbb{Z}$)

$\sin x = a$, $|a| \le 1$: $x = (-1)^k \arcsin a + k\pi$

$\cos x = a$, $|a| \le 1$: $x = \pm \arccos a + 2k\pi$

$\operatorname{tg} x = a$: $x = \operatorname{arctg} a + k\pi$; $\operatorname{ctg} x = a$: $x = \operatorname{arcctg} a + k\pi$

$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$; $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

Pentru $|a| > 1$, ecuațiile $\sin x = a$ și $\cos x = a$ nu au soluții.